Señales

Collection Editor:
Richard Baraniuk

Señales

Collection Editor:
Richard Baraniuk

Authors:

Richard Baraniuk
Michael Haag
Don Johnson
Melissa Selik
Ricardo von Borries

Translated By:
Fara Meza
Erika Jackson

Online:
< http://cnx.org/content/col10381/1.2/ >

C O N N E X I O N S

Rice University, Houston, Texas

Collection structure revised: September 28, 2006
PDF generated: February 4, 2011
For copyright and attribution information for the modules contained in this collection, see p. 35.

Table of Contents

Chapter 1

Clasificación y Propiedades de las Señales[1]

1.1 Introducción

Este módulo explicará algunos fundamentos para la clasificación de señales. Es básicamente una lista de definiciones y propiedades que son fundamentales para la discusión de señales y sistemas. Deberá notar que en algunas discusiones como la de señales de energía vs. señales de potencia[2] han sido asignadas con su propio módulo para una discusión mas completa, y no van a ser incluidas.

1.2 Clasificación de Señales

Junto con las clasificaciones de señales mostradas a continuación, es importante entender la Clasificación de Sistemas[3].

1.2.1 Tiempo Continuo vs. Tiempo Discreto

Como el nombre lo sugiere, esta clasificación se puede establecer, después de saber si el eje del tiempo (eje de las abscisas) es **discreto** o **continuo** (Figure 1.1). Una señal continua en el tiempo tendrá un valor para todos los números reales que existen en el eje del tiempo. En contraste a esto, una señal discreta (Chapter 6)en el tiempo es comúnmente creada utilizando el Teorema de Muestreo[4] para discretizar una señal continua, de esta manera la señal nada mas tendrá valores en los espacios que tienen una separación igual y son creados en el eje del tiempo.

[1]This content is available online at <http://cnx.org/content/m12818/1.8/>.
[2]"Signal Energy vs. Signal Power" <http://cnx.org/content/m10055/latest/>
[3]"Clasificación y Propiedades de los Sistemas" <http://cnx.org/content/m12822/latest/>
[4]"The Sampling Theorem" <http://cnx.org/content/m0050/latest/>

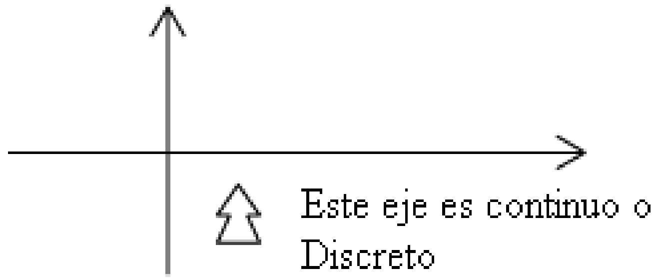


Figure 1.1

1.2.2 Análogo vs. Digital

La diferencia entre lo **análogo** y lo **digital** es muy similar a la diferencia entre el tiempo continuo y el tiempo discreto. Sin embargo, en este caso, la diferencia es con respecto al valor de la función (eje de las ordenadas) (Figure 1.2). Análogo corresponde al eje **y** continuo, mientras lo digital corresponde al eje **y** discreto. Un ejemplo de una señal digital es una secuencia binaria, donde la función solo tiene valores de cero o uno.

Figure 1.2

1.2.3 Periódico vs. Aperiódico

Señales periódicas[5] se repiten con un **periodo** T, mientras las señales aperiódicas o no periódicas no se repiten(Figure 1.3). Podemos definir una función periódica mediante la siguiente expresión matemática, donde t puede ser cualquier número y T es una constante positiva:

$$f(t) = f(T + t) \tag{1.1}$$

[5]"Señales Periódicas" <http://cnx.org/content/m12933/latest/>

El **periodo fundamental** de esta función, $f(t)$, es el valor más pequeño de T que permita la validación de la (1.1).

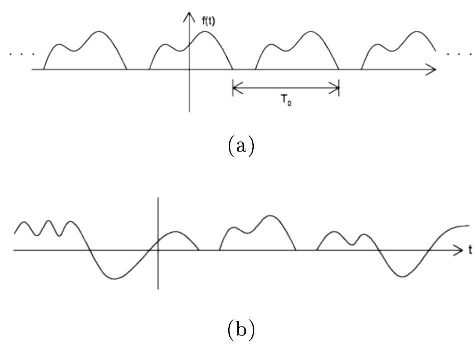
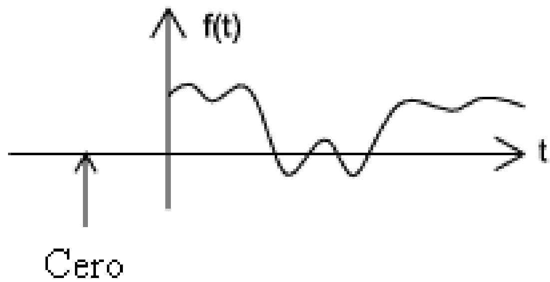


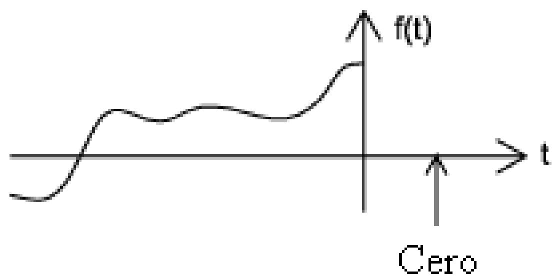
Figure 1.3: (a) Una señal periódica con periodo T_0 (b) Una señal Aperiódica

1.2.4 Causal vs. Anticausal vs. Nocausal

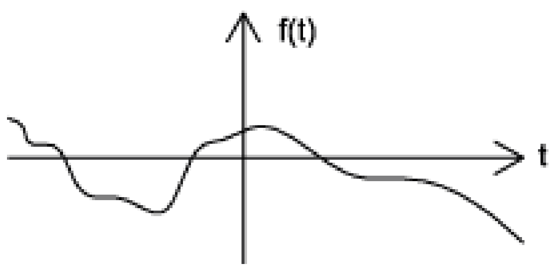
Las señales **causales** son señales que tienen valor de cero en el tiempo negativo, y las señales **anticausales** tienen valor cero en el tiempo positivo. Las señales **nocausales** son señales con valor de cero en el tiempo positivo y negativo(Figure 1.4).



(a)



(b)



(c)

Figure 1.4: (a) Una señal causal (b) Una señal anticausal (c) Una señal nocausal

1.2.5 Par vs. Impar

Una **señal par** es cualquier señal f (t) que satisface $f(t) = f(-t)$. las señales pares se pueden detectar fácilmente por que son **simétricas** en el eje vertical. Una **señal impar**, es una señal f que satisface $f(t) = -f(-t)$ (Figure 1.5).

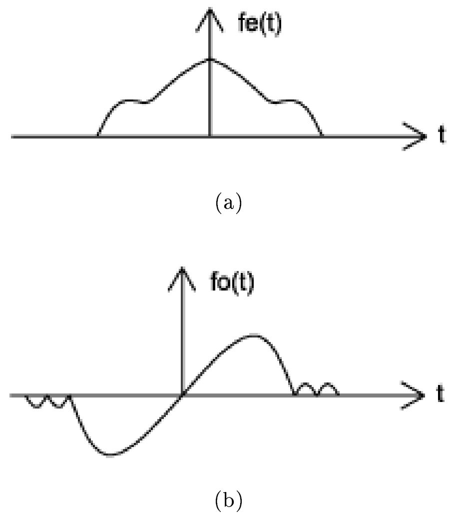


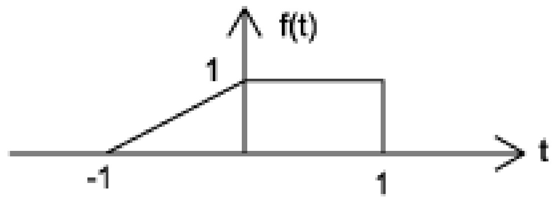
Figure 1.5: (a) Una señal par (b) Una señal impar

Usando las definiciones de par e impar, podemos demostrar que cualquier señal se puede escribir como una combinación de una señal par e impar. Cada señal tiene una descomposición par-impar. Para demostrar esto, no tenemos más que examinar una ecuación.

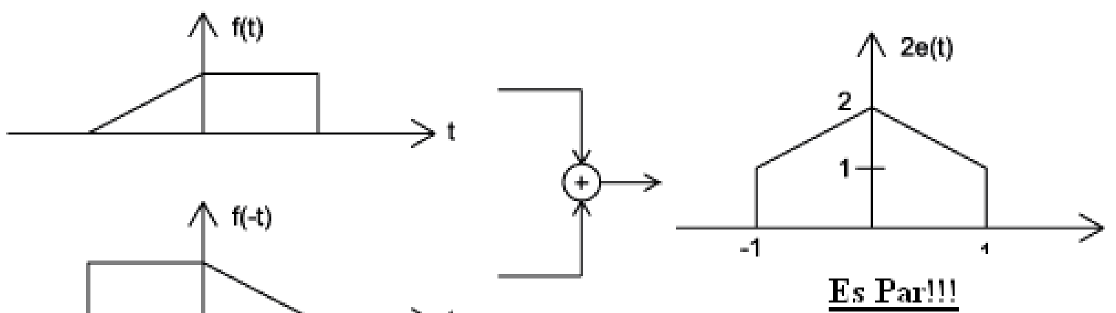
$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) \tag{1.2}$$

Al multiplicar y sumar esta expresión, demostramos que lo explicado anteriormente es cierto. También se puede observar que $f(t) + f(-t)$ satisface a una función par, y que $f(t) - f(-t)$ satisface a una función impar (Figure 1.6).

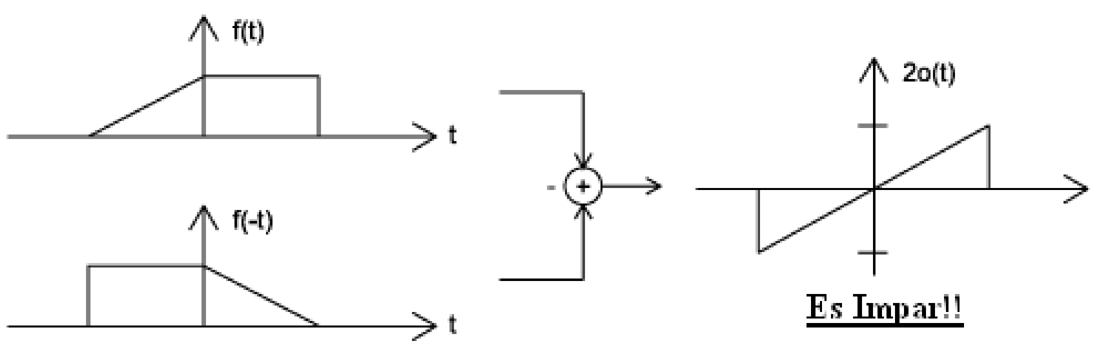
Example 1.1



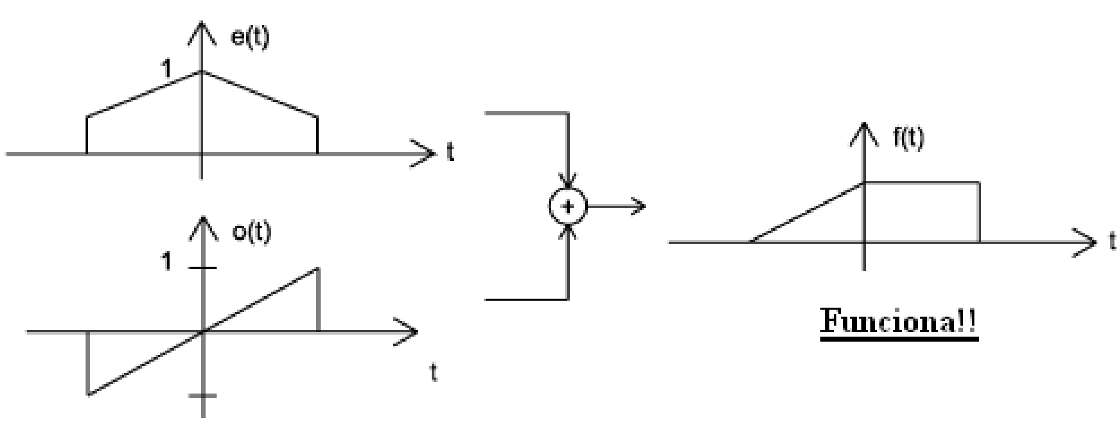
(a)



(b)



(c)

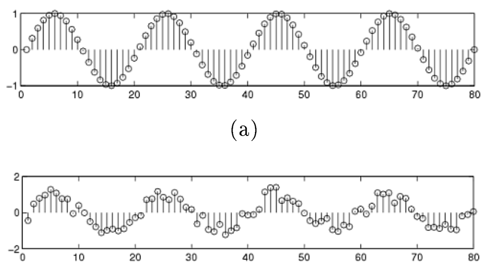


(d)

Figure 1.6: (a) Esta señal será descompuesta usando la descomposición Par-Impar (b) Parte Par: $e(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$ (c) Parte Impar: $o(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$ (d) Revisa: $e(t) + o(t) = f(t)$

1.2.6 Determinístico vs. Aleatorio

Una señal **determinística** es una señal en la cual cada valor está fijo y puede ser determinado por una expresión matemática, regla, o tabla. Los valores futuros de esta señal pueden ser calculados usando sus valores anteriores teniendo una confianza completa en los resultados. Una **señal aleatoria**[6], tiene mucha fluctuación respecto a su comportamiento. Los valores futuros de una señal aleatoria no se pueden predecir con exactitud, solo se pueden basar en los promedios [7] de conjuntos de señales con características similares (Figure 1.7).



(a)

(b)

Figure 1.7: (a) Señal Determinística (b) Señal Aleatoria

1.2.7 Hemisferio Derecho vs. Hemisferio Izquierdo

Este tipo de señales son aquellas cuyo valor es cero entre una variable definida y la infinidad positiva o negativa. Matemáticamente hablando, una señal de hemisferio-derecho es definida como cualquier señal donde $f(t) = 0$ para $t < t_1 < \infty$, y una señal de hemisferio-izquierdo es definida como cualquier señal donde $f(t) = 0$ para $t > t_1 > -\infty$. Las siguientes figuras son un ejemplo de esto (Figure 1.8). Las dos figuras “empiezan” en t_1 y luego se extienden a infinidad positiva o negativa con casi todos los valores siendo cero.

[6]"Introduction to Random Signals and Processes" <http://cnx.org/content/m10649/latest/>
[7]"Random Processes: Mean and Variance" <http://cnx.org/content/m10656/latest/>

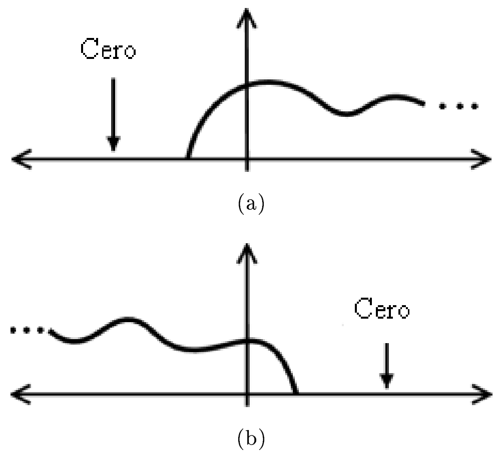


Figure 1.8: (a) Señal de Hemisferio-Derecho (b) Señal de Hemisferio-Izquierdo

1.2.8 Tamaño finito vs. Tamaño infinito

Como el nombre lo implica, las señales se pueden caracterizar dependiendo de su tamaño el cual puede ser infinito o finito. Casi todas las señales finitas se utilizan cuando se tiene una señal discreta o se tiene una secuencia de valores. En términos matemáticos, $f(t)$ es una **señal de tamaño finito** si tiene un valor **que no sea cero** en un intervalo finito

$$t_1 < f(t) < t_2$$

donde $t_1 > -\infty$ y $t_2 < \infty$. Se puede ver un ejemplo en Figure 1.9. De igual manera, **una señal de tamaño infinito** $f(t)$, es definida con valores no-cero para todos los números reales:

$$\infty \leq f(t) \leq -\infty$$

.

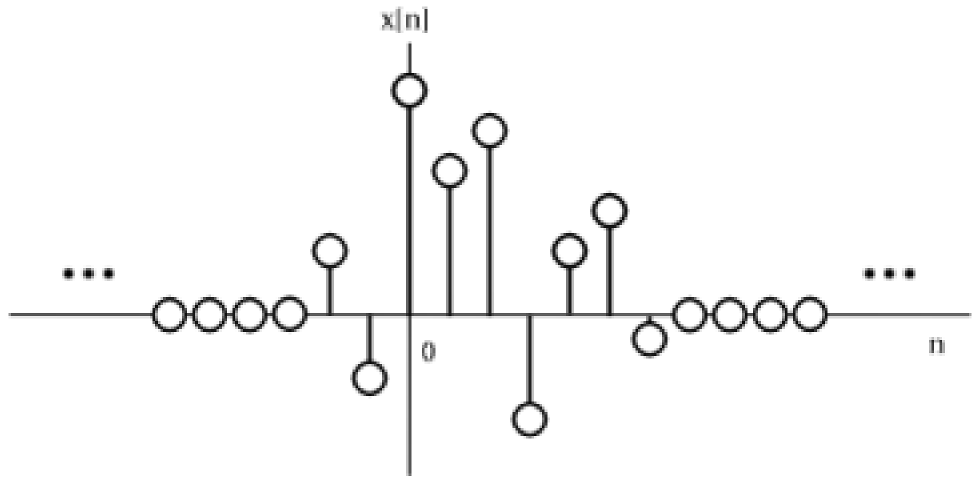


Figure 1.9: Señal de tamaño finito. Note que solo tiene valores que no son cero en un conjunto, intervalo finito.

Chapter 2

Operaciones para Señales[1]

Este módulo muestra dos operaciones para señales, cambio en el tiempo y escala en el tiempo. Operación de señales son operaciones realizadas sobre la variable tiempo de la señal. Estas operaciones son componentes comunes en el mundo real y como tales las debemos entender a fondo cuando se esté aprendiendo sobre sistemas y señales.

2.1 Desplazamiento en el eje del Tiempo

El desplazamiento en el tiempo, como su nombre lo sugiere, es trasladar la señal en el eje del tiempo. Esto se hace sumando o restando la cantidad del desplazamiento de tiempo a la función. Restando una cantidad fija en la variable de el tiempo tendrá un cambio en la señal hacia la derecha (retrasa) por esa cantidad, por el contrario al sumar una cantidad a la variable de el tiempo la señal se desplazará hacia la izquierda (avanza).

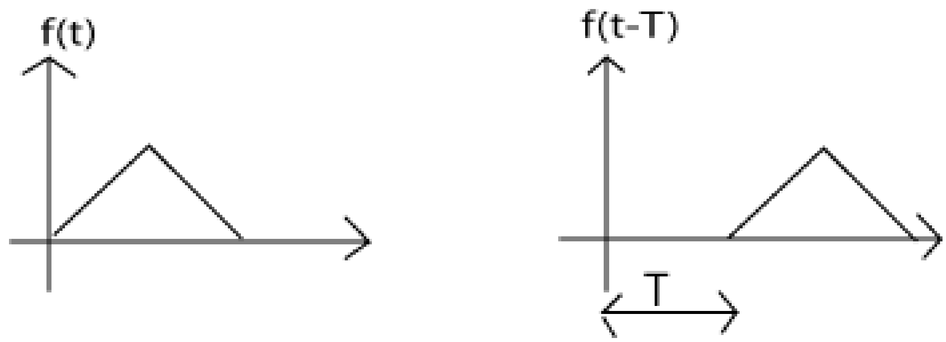


Figure 2.1: $f(t-T)$ mueve (retrasa) f a la derecha T.

[1] This content is available online at <http://cnx.org/content/m12823/1.7/>.

2.2 Escala en el eje del Tiempo

Escalar el tiempo es comprimir y/o expandir una señal al multiplicar las variables del tiempo por alguna cantidad. Si esa cantidad es mayor que uno, la señal se vuelve angosta, esto es conocido como compresión, cuando la cantidad es menor que uno, la señal se vuelve ancha y a esto lo conoceremos como expansión. Normalmente, estas operaciones les toman a las personas un tiempo en comprender, debido a que la intuición de las personas es que al multiplicar por una cantidad más grande que uno la señal será expandida y menor que uno será comprimida.

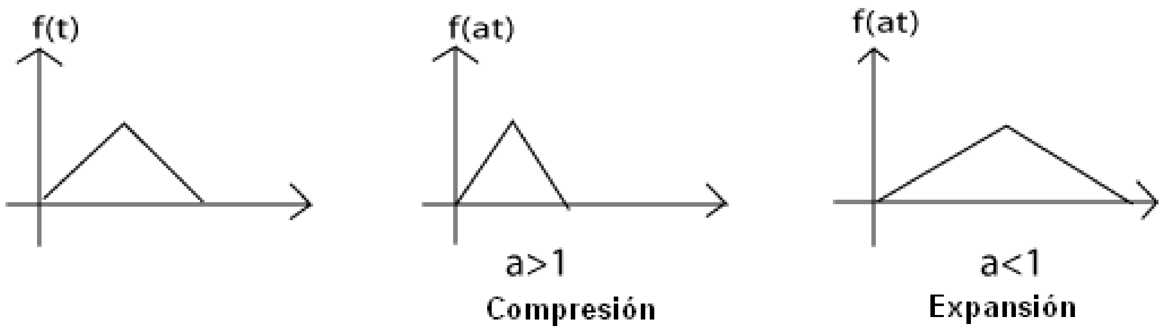


Figure 2.2: $f(at)$ comprime f por a.

Example 2.1
Las señales cambiadas y escaladas en el tiempo pueden ser contrarias unas de las otras. Este ejemplo muestra una manera de practicar estas operaciones hasta que desarrolle un sentido de como se debería ver la señal después de ciertas operaciones.

Dado $f(t)$, grafique $f(-(at))$.

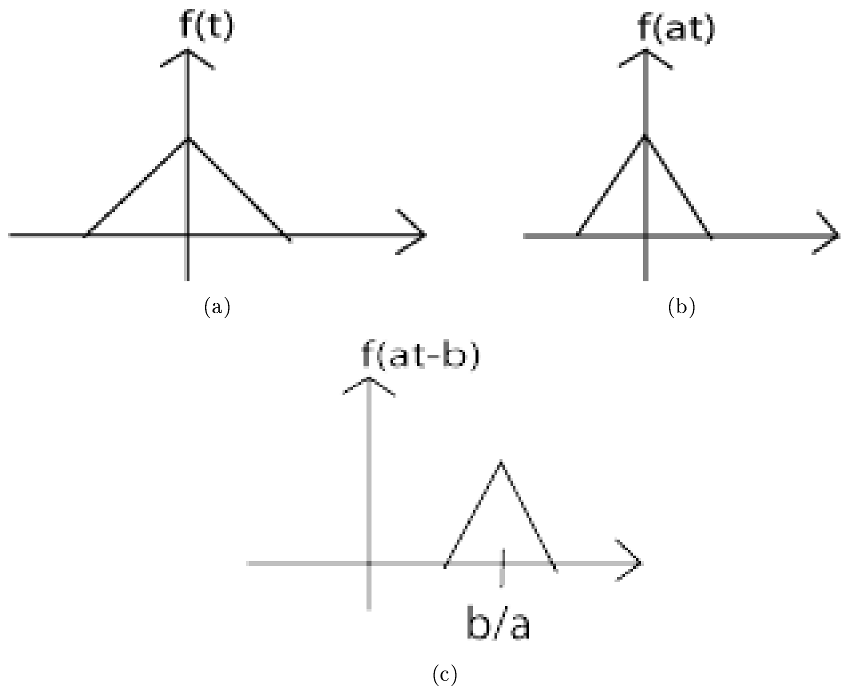


Figure 2.3: (a) Empieze con $f(t)$ (b) Luego remplace t con at para obtener $f(at)$ (c) Finalmente, remplace t con $t - \frac{b}{a}$ para obtener $f\left(a\left(t - \frac{b}{a}\right)\right) = f(at - b)$

2.3 Reflexión en el eje del Tiempo

Una pregunta muy natural que se considera cuando se está aprendiendo a escalar el tiempo es: ¿qué pasaría si la variable del tiempo es multiplicada por un número negativo? La respuesta para esto es la inversión en el tiempo. Esta operación invierte el eje del tiempo, en otras palabras, cambia la señal respecto al eje de las ordenadas.

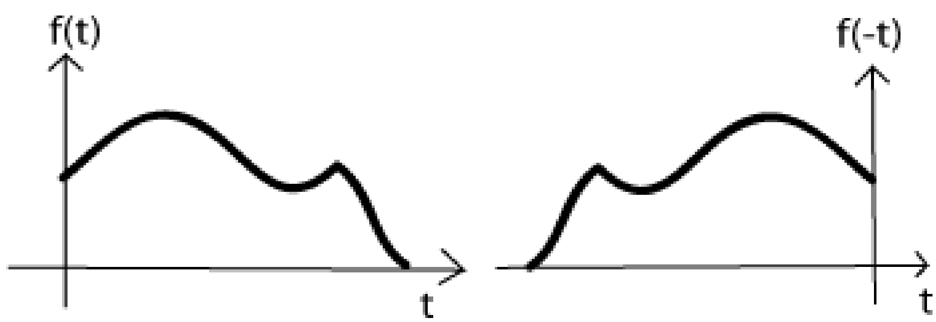


Figure 2.4: Reflexión en el eje del Tiempo

Chapter 3

Señales Útiles[1]

Antes de ver este módulo, usted tendrá que tener una idea básica sobre lo que es una señal, sus clasificaciones y operaciones (Chapter 1). Como un repaso, una señal es una función definida con respecto a una variable independiente. Regularmente, esta variable es el tiempo pero podría representar un índice para una secuencia, o un índice para cualquier número de cosas, o cualquier número de dimensiones. La mayor parte, si es que no todas, las señales que usted verá en sus estudios y en el mundo real podrán ser creadas de las señales básicas que aquí va a estudiar. Por esta razón, estas señales elementales son comúnmente conocidas como los **fundamentos** para cualquier otra señal.

3.1 Senosoidales

Probablemente la señal elemental más importante que usted usará es el senosoidal evaluado en su parte real. En su forma de tiempo-continuo, la forma general de la función se expresa así

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{3.1}$$

donde A es la amplitud, ω es la frecuencia, y ϕ representa el desplazamiento. Note que es común ver que ωt es remplazado con $2\pi f t$. Las señales senosoidales son periódicas, esto hace que su periodo, o cualquier señal periódica puedan ser expresada de la siguiente manera

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.2}$$

[1] This content is available online at <http://cnx.org/content/m12819/1.11/>.

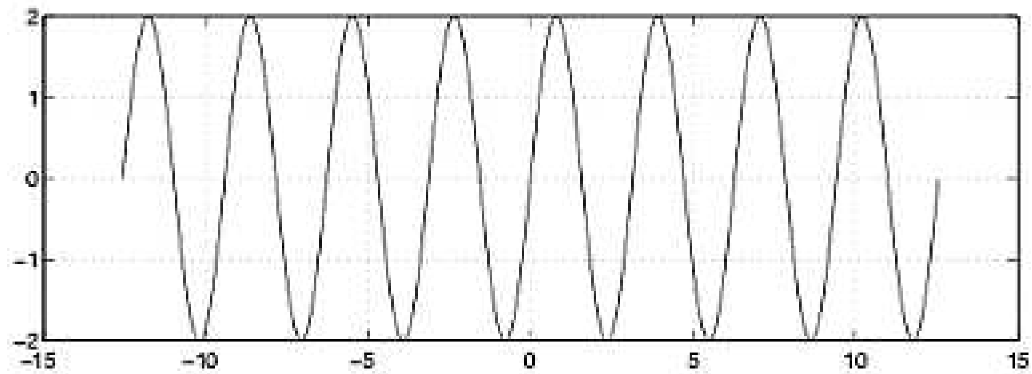


Figure 3.1: Senosoidal con $A = 2$, $w = 2$, y $\phi = 0$.

3.2 Funciones de Exponenciales Complejos

Tal vez esta señal es tan importante como la senosoidal, la función de **exponencial complejo** se convertirá en una parte crítica para el estudio de señales y sistemas. La expresión general se escribe de la siguiente manera

$$f(t) = Be^{st} \tag{3.3}$$

donde s, mostrado abajo, es un número complejo en términos de σ, con una fase constante, y con ω siendo la frecuencia:

$$s = \sigma + i\omega$$

Por favor vea el módulo de Exponencial Complejo (Chapter 5) o los módulos de las otras señales elementales[2].

3.3 Exponenciales reales

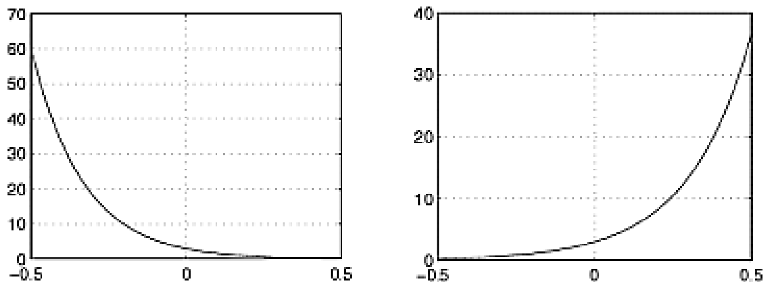
Como el nombre lo implica, los exponenciales reales contienen números no imaginarios y son simplemente expresados de la siguiente manera

$$f(t) = Be^{\alpha t} \tag{3.4}$$

donde B y α son parámetros reales. Las funciones de exponencial complejo oscilan, sin embargo, esta señal nada mas crece o decae dependiendo del valor de α.

- **Exponencial que decae** , cuando $\alpha < 0$
- **Exponencial que Crece**, cuando $\alpha > 0$

[2] "Elemental Signals": Section Complex Exponentials <http://cnx.org/content/m0004/latest/#sec2>



(a) (b)

Figure 3.2: Ejemplos de Exponenciales Reales (a) Exponencial que decae (b) Exponencial que Crece

3.4 Función de impulso unitario

La "función" de **impulso unitario (Chapter 4)** (o la función **delta de Dirac**) es una señal que tiene una altura infinita y un ancho casi inexistente. Sin embargo, por la manera que es definida, al ser integrada da un valor de uno. Mientras en el mundo de ingeniería esta señal es útil y ayuda a entender muchos conceptos, algunos matemáticos tienen problemas con esta al ser llamada función, porque no está definida en $t = 0$. Los ingenieros se evitan este problema al mantenerla definida con una integral. El impulso unitario es comúnmente conocido como

$$\delta(t)$$

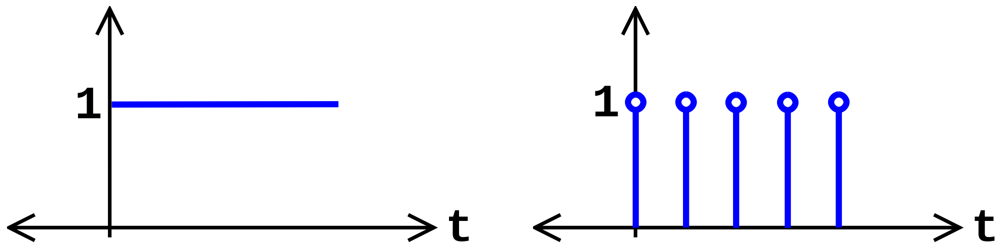
La propiedad más importante de esta función es demostrada con la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{3.5}$$

3.5 Función de Escalón unitario

Otra función básica para este curso es la función de **Escalón unitario** que se define como

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$



(a) (b)

Figure 3.3: Funciones Básicas del Escalón (a) Escalón unitario de Tiempo-Continuo (b) Escalón unitario de Tiempo-Discreto

Note que esta función es discontinua en el origen; sin embargo no se necesita definirla en este punto ya que no es necesario en la teoría de la señal. La función de Escalón unitario es una señal muy útil para probar y definir otras señales. Por ejemplo, usando varias de estas señales movidas en el tiempo y multiplicadas por otras señales, se puede obtener alguna porción de la señal por la que fue multiplicada y eliminar el resto.

3.6 Función Rampa

Esta función está relacionada con la función descrita anteriormente. La función Escalón unitario va desde cero a uno instantáneamente, pero esta función es la que mejor se parece a una función en la vida real, donde se necesita un tiempo para que la señal vaya incrementandose desde cero a su valor ajustado, en este caso uno. La función rampa está definida así:

$$r(t) = \begin{cases} 0 \text{ if } t < 0 \\ \frac{t}{t_0} \text{ if } 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 \text{ if } t > t_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

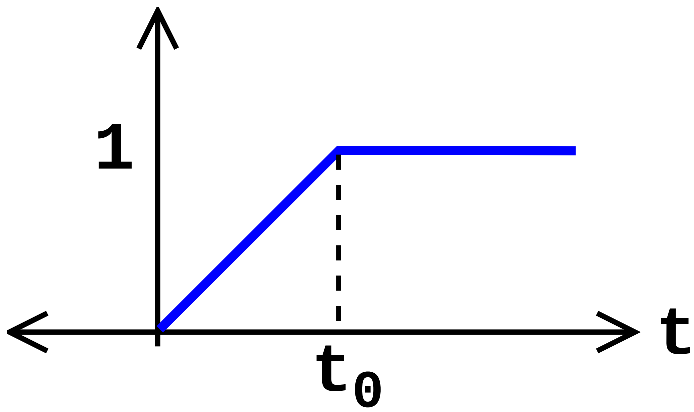


Figure 3.4: Función Rampa

Chapter 4

Función de Impulso[1]

En ingeniería usualmente se maneja la idea de una acción ocurriendo a un determinado punto. Puede ser una fuerza en ese punto o una señal en un punto del tiempo, se convierte necesario desarrollar alguna manera cuantitativa de definir este hecho. Esto nos lleva a la idea de un pulso unitario. Es probablemente la segunda señal más importante en el estudio de señales y sistemas después del Exponencial Complejo (Chapter 5).

4.1 Función Delta de Dirac

La Función Delta de Dirac, conocida también como el impulso unitario o función delta es una función infinítamente angosta, infinítamente alta, cuya integral tiene un valor **unitario** (Ver (4.1) abajo). Tal vez la manera mas simple de visualizar esto es usar un pulso rectangular que va de $a-\frac{\epsilon}{2}$ a $a+\frac{\epsilon}{2}$ con una altura de $\frac{1}{\epsilon}$. Al momento de tomar su límite, $\underset{\epsilon\to 0}{\text{limit}}$, podemos observar que su ancho tiende a ser cero y su altura tiende a infinito conforme su área total permanece constante con un valor de uno. La función del impulso usualmente se escribe como $\delta(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1 \tag{4.1}$$

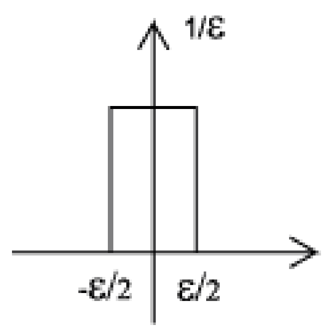


Figure 4.1: Esta es una manera de visualizar la Función Delta de Dirac.

[1]This content is available online at <http://cnx.org/content/m12824/1.9/>.

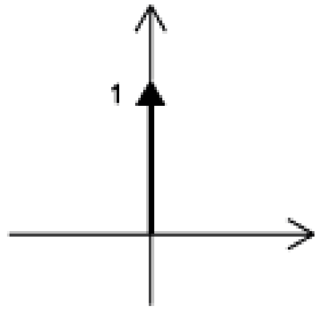


Figure 4.2: Por que es difícil dibujar algo que es infinitamente alto, nosotros representamos la Delta de Dirac con una flecha centrada en el punto donde es aplicada. Si queremos escalarla, podemos escribir el valor de escalamiento a un lado de la flecha. Este es un muestreo unitario (no tiene escala).

4.1.1 La propiedad de desplazamiento del impulso

El primer paso para comprender los resultados que esta función nos brinda, es examinar lo que sucede cuando esta función es multiplicada por alguna otra función.

$$f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t) \tag{4.2}$$

Esta función es cero en todas partes excepto en el origen, así que básicamente estamos eliminando el valor de la función de multiplicación al evaluarla en cero.

A primera vista esto no parece tener mayor importancia, porque ya sabemos que el impulso evaluado en cero es infinito, y todo lo multiplicado por infinito da un resultado infinito. Pero, ¿qué pasa si integramos el resultado de la multiplicación?

Propiedad de Desplazamiento

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\,\delta(t)\,dt \\ &= f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt \\ &= f(0)\end{aligned} \tag{4.3}$$

Finalmente lo que obtuvimos es una simple función evaluada en cero. Si hubiéramos usado $\delta(t-T)$ en vez de $\delta(t)$, podríamos haber desplazado $f(T)$. A esto es lo que llamaremos la **propiedad de desplazamiento** de la función de Dirac, el cual se usa frecuentemente para definir el impulso unitario.

Esta propiedad es muy útil al momento de desarrollar la idea de convolución [2] la cual es una de los fundamentos principales para el procesamiento de señales. Al usar convolución y esta propiedad podemos representar una aproximación a cualquier resultado de un sistema si se conoce la respuesta al impulso del sistema y su señal de entrada. De clic en el link de convolución que aparece arriba para mas información sobre este tema.

[2] "Convolución de Tiempo-Continuo" <http://cnx.org/content/m12828/latest/>

4.1.2 Otras Propiedades del Impulso

En esta sección se muestran algunas otras propiedades de el impulso sin entrar en los detalles de probar las propiedades- esta parte la dejaremos para que usted verifique las propiedades ya que son sencillas de comprobar. Note que estas propiedades funcionan para el tiempo continuo **y** discreto.

Propiedades de Impulso Unitario

- $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$
- $\delta(t) = \delta(-t)$
- $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$, donde $u(t)$ es el escalón unitario.

4.2 Impulso de tiempo-discreto (muestreo unitario)

La extensión de la función impulso unitario al tiempo-discreto se convierte en una trivialidad. Todo lo que realmente necesitamos es darnos cuenta que la integración en tiempo-continuo equivale a una sumatoria en tiempo-discreto. Por lo tanto buscaremos una señal que al sumarla sea cero y al mismo tiempo sea cero en todas partes excepto en el origen.

Impulso de Tiempo-Discreto

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.4)$$

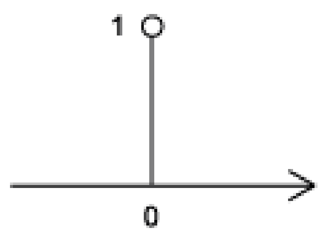


Figure 4.3: Representación gráfica del impulso discreto

Al analizar una gráfica de tiempo-discreto de cualquier señal discreta, uno puede notar que todas las señales discretas están compuestas de un conjunto de muestras unitarias que están escalados y desplazados en el tiempo. Si dejamos que el valor de una secuencia en cada entero k sea descrita por $s[k]$ y la muestra unitaria retrasado que ocurre en k sea escrito como $\delta[n-k]$, nosotros podríamos escribir cualquier señal como la suma de impulsos unitarios retrasados que son escalados por un valor de la señal, o por coeficientes de escalamiento.

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]\,\delta[n-k] \quad (4.5)$$

Esta descomposición es una propiedad que solo se aplica a señales de tiempo-discreto y resulta ser una propiedad muy útil para estas señales.

> NOTE: Usando el razonamiento anterior, nosotros hemos desarrollado la ecuación(4.5), la cual es un concepto fundamental usado en la convolución de tiempo-discreto[3].

[3]"Convolución Discreta" <http://cnx.org/content/m12833/latest/>

4.3 La Respuesta de Impulso

La **respuesta de impulso** es exactamente lo que su nombre implica- la respuesta de un sistema LTI, como por ejemplo un filtro, cuando la señal de entrada del sistema es un impulso unitario (o muestra unitaria). Un sistema puede ser completamente descrito por su respuesta al impulso por las razones explicadas previamente, ya que todas las señales pueden ser representadas por una superposición de señales. Una respuesta al impulso da una descripción equivalente a la dada por una función de transferencia[4], ya que existen Transformadas de Laplace [5] para cada una.

> NOTE: Casi toda la literatura usa $\delta(t)$ y $\delta[n]$ para diferenciar entre un impulso de tiempo-continuo y un impulso de tiempo-discreto.

[4]"Transfer Functions" <http://cnx.org/content/m0028/latest/>
[5]"La Transformada de Laplace" <http://cnx.org/content/m12978/latest/>

Chapter 5

El Exponencial Complejo[1]

5.1 Bases para el Exponencial

El **exponencial complejo** es una de las señales mas importantes y fundamentales en el análisis de señales y sistemas. Su importancia proviene de que sus funciones sirven como una base para las señales periódicas, como también sirven para poder caracterizar señales lineales de tiempo invariante [2]. Antes de continuar, usted debería familiarizarse con los números complejos[3].

5.1.1 Exponential Básico

Para todos los números x, nosotros podemos derivar y definir fácilmente una función exponencial de una serie de Taylor mostrada aquí:

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{5.1}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \tag{5.2}$$

Podemos probar, usando un examen racional, que esta serie converge. De esta manera, podemos decir que la función exponencial mostrada arriba es continua y se puede definir fácilmente.

De esta definición, podemos probar la siguiente propiedad de las exponenciales que resulta ser muy útil, especialmente para los exponenciales que se discutirán en la siguiente sección.

$$e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} e^{x_2} \tag{5.3}$$

5.1.2 Exponencial Complejo de Tiempo-Continuo

Para todos los números complejos s, podemos definir una **señal exponencial compleja de tiempo-continuo** como:

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{st} \\ &= Ae^{i\omega t} \end{aligned} \tag{5.4}$$

[1]This content is available online at <http://cnx.org/content/m12825/1.6/>.
[2]"Clasificación y Propiedades de los Sistemas" <http://cnx.org/content/m12822/latest/>
[3]"Complex Numbers" <http://cnx.org/content/m0081/latest/>

donde A es una constante, t es la variable independiente tiempo, y para s imaginaria, $s = i\omega$. De esta ecuación podemos revelar una importante identidad, la **identidad de Euler** (para más información sobre Euler lea su biografía short biography[4]):

$$Ae^{i\omega t} = A\cos(\omega t) + i(A\sin(\omega t)) \tag{5.5}$$

De la identidad de Euler podemos separar la señal en su parte imaginaria y en su parte real. También podemos observar el uso de exponenciales para representar cualquier señal real. Si modificamos la frecuencia y el ángulo, podriamos representar cualquier señal por medio de una superposición de muchas señales—todas deben ser representadas por un exponencial.

La expresión anterior no incluye ninguna información del ángulo. Debemos generalizar la expresión de exponenciales para generalizar funciones senosoidales con cualquier valor en el ángulo, esto se logra al hacer una sustitución de s, $s = \sigma + i\omega$, que al final nos lleva a

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{st} \\ &= Ae^{(\sigma+i\omega)t} \\ &= Ae^{\sigma t}e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde S se define como la **amplitud compleja**, o **fasor**, de los primeros dos términos de la ecuación de arriba

$$S = Ae^{\sigma t} \tag{5.7}$$

Tomando en cuenta la identidad de Euler, podemos escribir el exponencial como un senosoidal, donde el término del ángulo es mas notable.

$$f(t) = Ae^{\sigma t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \tag{5.8}$$

Esta fórmula se puede descomponer en su parte real e imaginaria:

$$\Re(f(t)) = Ae^{\sigma t}\cos(\omega t) \tag{5.9}$$

$$\Im(f(t)) = Ae^{\sigma t}\sin(\omega t) \tag{5.10}$$

5.1.3 Exponencial Complejo en Tiempo-Discreto

Finalmente, hemos llegado a la última forma de señales exponenciales que nos interesan estudiar, la **señal exponencial compleja en tiempo-discreto**, de la cual no daremos tantos detalles como lo hicimos para su contraparte, ya que las dos siguen las mismas propiedades y usan la misma lógica ya explicada previamente. Por ser discreta, tiene una diferencia en la notación usada para representar su naturaleza discreta

$$\begin{aligned} f[n] &= Be^{snT} \\ &= Be^{i\omega nT} \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde nT representa los instantes de tiempo-discreto de la señal.

[4] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Euler.html

5.2 La Relación de Euler

Junto a la identidad de Euler, Euler también describe una manera de representar una señal exponencial compleja en términos de su parte real e imaginaria usando la siguiente relación:

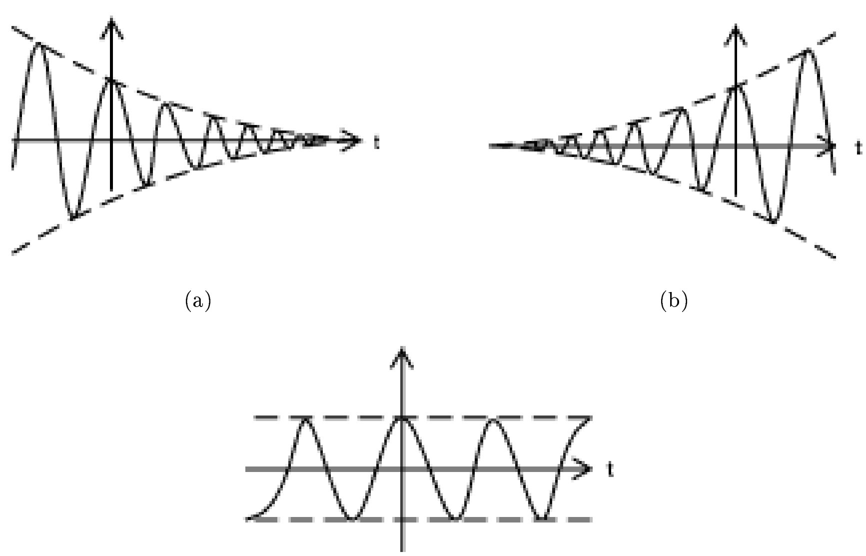
$$\cos(\omega t) = \frac{e^{iwt} + e^{-(iwt)}}{2} \tag{5.12}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{iwt} - e^{-(iwt)}}{2i} \tag{5.13}$$

$$e^{iwt} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \tag{5.14}$$

5.3 Dibujando el Exponencial Complejo

Hasta este momento, nosotros hemos demostrado como un exponencial complejo se puede separar en su parte real e imaginaria. Ahora tenemos que ver como se grafican todas estas partes. Podemos observar que la parte real y la parte imaginaria están compuestas por un senosoidal multiplicado por una función de exponencial real. También sabemos que los senosoidales oscilan entre el valor uno y negativo uno. Entonces se puede ver que las partes reales e imaginarias del exponencial complejo oscilarán dentro de una ventana definida por la parte real del exponencial.



(c)

Figure 5.1: Las formas posibles para la parte real de un exponencial complejo. Note que la oscilación es el resultado de un coseno con un máximo local en $t = 0$. (a) Si σ es negativa, tenemos el caso de una ventana de un exponencial que desciende. (b) Si σ es positivo, tenemos el caso de una ventana de un exponencial que crece. (c) Si σ es cero, tenemos una ventana constante.

Mientras el σ determina el índice de decrecimiento/ crecimiento, ω determina el índice de las oscilaciones. Esto se puede notar al observar que ω es parte del argumento usado en la parte que corresponde al senosoidal.

Exercise 5.1 *(Solution on p. 29.)*

¿Cómo se ven las partes imaginarias del exponencial complejo en el dibujo previo?

Example 5.1

La siguiente demostración le permite ver como el argumento cambia la forma del exponencial complejo. Por favor oprima aquí [5]para ver las instrucciones de como se usa este demo.

This is an unsupported media type. To view, please see
http://cnx.org/content/m12825/latest/Complex_Exponential.vi

5.4 El Plano Complejo

Se convierte de extrema importancia el ver la variable compleja s como un punto en el plano complejo[6] (el **plano-s**).

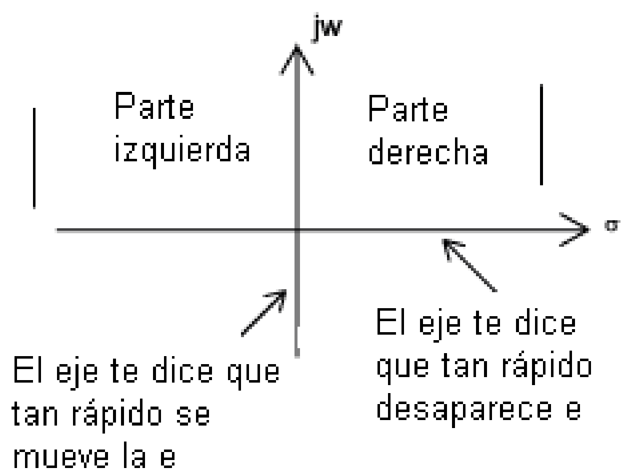


Figure 5.2: Este es el plano-s. Note que en cualquier momento en que s se encuentre en el lado derecho del plano, el exponencial complejo crecerá con el tiempo, mientras que si por el contrario s se encuentra en el lado izquierdo, el exponencial complejo disminuirá.

[5]"How to use the LabVIEW demos" <http://cnx.org/content/m11550/latest/>
[6]"The Complex Plane" <http://cnx.org/content/m10596/latest/>

Solutions to Exercises in Chapter 5

Solution to Exercise 5.1 (p. 28)

Se ve igual excepto que la oscilación es senosoidal y no cosenoidal (pasa por el origen y no tiene ningún máximo local en $t = 0$).

Chapter 6

Señales en Tiempo-Discreto[1]

Hasta este punto, hemos tratado solo con señales y sistemas **análogos**. En términos matemáticos, señales análogas son funciones que constan de cantidades continuas como sus variables independientes, por ejemplo, espacio y tiempo. Señales de tiempo-discreto [2] son funciones definidas en números enteros; son secuencias. Uno de los resultados fundamentales en la teoría de señales [3] detalla las condiciones en las cuales las señales análogas pueden ser trasformadas en una señal de tiempo-discreto y ser recuperada sin ningún tipo de **error**. Este resultado es importante por que las señales de tiempo-discreto pueden ser manipuladas por sistemas de respuesta instantánea como los son los programas de computadoras. En los módulos subsecuentes se describen como todos los sistemas análogos se pueden implementar virtualmente con el uso de software.

Sin darle importancia a estos resultados, las señales de tiempo-discreto tienen una forma más general, abarcando señales derivadas de señales análogas **y de otro tipo** de señales. Por ejemplo, los caracteres que forman un archivo de escritura proveniente de una secuencia, que también son una señal de tiempo-discreto. También tenemos que tratar con señales y sistemas de valor simbólico [4] .

Como en señales análogas, buscamos distintas maneras de descomponer señales discretas con valor real en sus componentes más simples. Con este método que nos lleva a un mayor entendimiento de estructura de señales, podemos usar esta estructura para representar información (crear maneras de representar información con señales) y de extraer información (extraer la información que es representada). Para señales de valor simbólico este método es diferente: desarrollamos una representación común para todas las señales de valor simbólico para así representar la información que ellas contienen de una manera unificada. Desde el punto de vista de la representación de información, la cuestión más importante es la eficiencia para las señales de valor simbólico y reales; la eficiencia es la manera más compacta y rápida de representar información para que pueda ser después extraída.

6.1 Señales de Valores Reales y Complejos

Una señal discreta es representada simbólicamente como $s(n)$, donde $n = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Usualmente dibujamos señales discretas por medio de diagramas de línea (Stem Plots) para enfatizar el hecho que son funciones definidas en números enteros. Podemos retrasar la señal discreta por un número, tal como se hace en las señales análogas. El retraso de un muestreo unitario es expresado por $\delta(n-m)$, y es igual a uno cuando $n = m$.

[1] This content is available online at <http://cnx.org/content/m12820/1.9/>.
[2] "Discrete-Time Signals and Systems" <http://cnx.org/content/m10342/latest/>
[3] "The Sampling Theorem" <http://cnx.org/content/m0050/latest/>
[4] "Discrete-Time Signals and Systems" <http://cnx.org/content/m10342/latest/#para11>

Señal del Coseno en Tiempo-Discreto

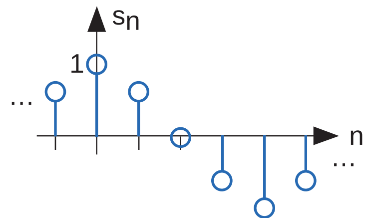


Figure 6.1: Señal del Coseno en Tiempo-Discreto es graficada con una "stem plot". ¿Puede usted encontrar la fórmula para esta señal?

6.2 Exponenciales Complejos

La señal más importante es la **secuencia del exponencial complejo** .

$$s(n) = e^{i2\pi fn} \tag{6.1}$$

6.3 Senosoidales

Los senosoidales discretos tienen la forma de $s(n) = A\cos(2\pi fn + \phi)$. Al contrario de exponenciales complejos y senosoidales análogos que pueden tener frecuencias con cualquier valor real, frecuencias para señales discretas dan formas únicas **solo** cuando f está en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Esta propiedad se puede tener al notar que cuando se suma un valor a la frecuencia del exponencial complejo discreto no afecta en ninguna manera a los valores de la señal.

$$\begin{aligned} e^{i2\pi(f+m)n} &= e^{i2\pi fn}e^{i2\pi mn} \\ &= e^{i2\pi fn} \end{aligned} \tag{6.2}$$

La derivación es porque el exponencial complejo evaluado en un múltiplo de 2π es igual a uno.

6.4 Muestreo Unitario

La segunda señal importante en el tiempo discreto, está definida por:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.3}$$

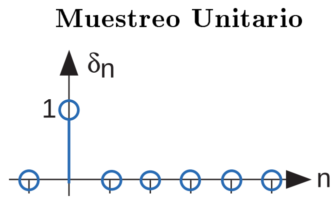


Figure 6.2: Muestreo Unitario.

Al examinar la gráfica de señales discretas, como el coseno mostrado en la figura Figure 6.1 (Señal del Coseno en Tiempo-Discreto), se puede observar que todas la señales consisten en muestreos unitarios que son desplazados y escalados por un valor real. El valor de una secuencia a cualquier número m es escrito por $s(m)$ y el desplazamiento que ocurre en m es escrito por $\delta(n-m)$, por esta razón podemos descomponer **cualquier** señal en una suma de muestras unitarias desplazadas a una localización apropiada y escalada por el valor de una señal.

$$s(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\,\delta(n-m) \tag{6.4}$$

Este tipo de descomposición es única para señales discreta.

Sistemas discretos pueden actuar sobre señales en tiempo discreto en forma similar a las vistas en señales y sistemas análogos. Debido al rol que juega el software sobre sistemas discretos, una gran variedad de sistemas pueden ser desarrolladas y construidas a diferencia de las que se pueden lograr usando señales análogas. De hecho, una clase especial de señales análogas pueden ser convertidas en señales discretas, procesadas por software, y convertidas después en señales análogas, todo esto sin errores. Para estas señales, varios sistemas pueden ser producidos en software, con realizaciones análogas equivalentes siendo difíciles de formar, si no es que imposibles de diseñar.

6.5 Señales de Valores Simbólicos

Otro aspecto interesante de señales discretas es que sus valores no tienen que ser números reales. Nosotros si tenemos señales discretas con valores reales como el sinusoidal, pero también tenemos señales que indican una secuencia de números usados en el teclado de computadoras. Esos caracteres no son números reales, y como posible colección de valores, tienen muy poca estructura matemática y nada más constante con el hecho que son miembros de un conjunto. Cada elemento de una señal de valores simbólicos $s(n)$ toma valores $\{a_1, \ldots, a_K\}$ que forman parte de un **alfabeto** A. Esta terminología técnica no restringe los símbolos a ser miembros de un alfabeto del idioma ingles o griego. Ellos pueden representar caracteres en un teclado, byte (secuencias de 8-bits), números que pudieran significar una temperatura. Los sistemas digitales son construidos de circuitos digitales, que consisten **completamente** de circuitos con elementos análogos. La retransmisión y recepción de señales discretas, como el correo electrónico, son posibles gracias al uso de sistemas y señales análogas. Entender como las señales discretas y análogas se interelacionan una con otra es el objetivo principal de este curso.

Index of Keywords and Terms

Keywords are listed by the section with that keyword (page numbers are in parentheses). Keywords do not necessarily appear in the text of the page. They are merely associated with that section. *Ex.* apples, § 1.1 (1) **Terms** are referenced by the page they appear on. *Ex.* apples, 1

Attributions

Collection: *Señales*
Edited by: Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/col10381/1.2/

Module: "Clasificación y Propiedades de las Señales"
By: Melissa Selik, Richard Baraniuk, Michael Haag, Ricardo von Borries
URL: http://cnx.org/content/m12818/1.8/
Pages: 1-9

Based on: Signal Classifications and Properties
By: Melissa Selik, Richard Baraniuk, Michael Haag
URL: http://cnx.org/content/m10057/2.16/

Module: "Operaciones para Señales"
By: Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/m12823/1.7/
Pages: 11-14

Based on: Signal Operations
By: Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/m10125/2.5/

Module: "Señales Útiles"
By: Melissa Selik, Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/m12819/1.11/
Pages: 15-19

Based on: Useful Signals
By: Melissa Selik, Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/m10058/2.10/

Module: "Función de Impulso"
By: Melissa Selik, Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/m12824/1.9/
Pages: 21-24

Based on: The Impulse Function
By: Melissa Selik, Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/m10059/2.16/

Module: "El Exponencial Complejo"
By: Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/m12825/1.6/
Pages: 25-29

Based on: The Complex Exponential
By: Richard Baraniuk
URL: http://cnx.org/content/m10060/2.18/

Module: "Señales en Tiempo-Discreto"
By: Don Johnson
URL: http://cnx.org/content/m12820/1.9/
Pages: 31-33

Based on: Discrete-Time Signals
By: Don Johnson
URL: http://cnx.org/content/m0009/2.20/

Señales

Éste es el primer capítulo de un curso que trata acerca de señales, sistemas, y transformadas a partir de las bases matématicas y teoréticas hasta las implementaciones prácticas en circuitos y algoritmos.